Gewone differentiaalvergelijkingen
Cursus 2000-2001.
Tentamen 2 maart 2001, duur: 3 uur.

1.[1] Beschouw het beginwaardeprobleem: $y' = 6x\sqrt[3]{y^2}$, $y(x_0) = y_0$.
(a)[3] Los het probleem op en schets voor een aantal punten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ een (maximale) oplossing. Denk aan de stationaire oplossing.
(b)[1] Bepaal de grootste deelverzameling $\mathcal{D}$ van punten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor het beginwaardeprobleem *tenminste* één oplossing heeft. Formuleer de gebruikte stelling en verklaar je antwoord.
(c)[3] Bepaal de grootste deelverzameling $\mathcal{G}$ van punten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor het beginwaardeprobleem *precies* één oplossing heeft. Formuleer de gebruikte stelling en verklaar je antwoord.
(d)[2] Bewijs met behulp van de definitie van Lipschitz continuïteit dat de functie $f(x, y) = 6x\sqrt[3]{y^2}$ in elke omgeving van het punt $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ niet Lipschitz continu is in y.

2.[1] Beschouw het systeem van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 3x^2 \end{cases}$$

(a)[3] Bepaal de differentiaalvergelijking voor y als functie van x en los die vervolgens op. (Alleen ter controle: $y^2 = x^2 - x^3 - C$.)
(b)[6] Bepaal vervolgens met behulp van (a) het faseportret van de oplossingen in het x, y-vlak:
(i) Schets een aantal krommen en geef de doorlooprichting aan als $t \to +\infty$. Verklaar je antwoord.
(ii) Verklaar het bestaan van periodieke oplossingen. Schets een aantal periodieke oplossingen in het faseportret. Binnen welk gebied liggen ze?
(iii) Wijs in het faseportret de stabiele punten aan en onderzoek de stabiliteit van de oplossingen (instabiel, stabiel, asymptotisch stabiel). Verklaar je antwoord aan de hand van het faseportret. Er wordt geen ε-δ verhaal van je verwacht.

3.[1] Los op met behulp van de aangegeven methode.
(a)[4] $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$. Bepaal een integrerende factor van de vorm $\varphi(x, y) = f(x)$. (Alleen ter controle: bijvoorbeeld $f(x) = x$.)
(b)[5] $x^2y'' + x(x-2)y' - (x-2)y = x^3e^x$. Verlaag de orde met $y(x) = x$.

Z.O.Z.

4.[1] (a)[6] (i) Beschouw een 2×2 systeem van eerste orde differentiaalvergelijkingen van de vorm $y'(t) = Ay(t)$ met constante coëfficiënten. Geef nodige en voldoende voorwaarden voor de eigenwaarden van A opdat geldt dat *elke* oplossing van het systeem begrensd is. Verklaar je antwoord.
(ii) Voldoet het systeem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} y(t)$$

aan je voorwaarden? Los de vergelijking op en verklaar je antwoord.
(b)[3] Van een homogene n-de orde lineaire differentiaalvergelijking met coëfficiënten die continu zijn op een interval I is de coëfficiënt van de $(n-1)$-ste afgeleide gelijk aan 0. Bewijs dat de Wroskiaan (= de determinant van een bijbehorende fundamentele matrix) een constante is op I. Kan die constante = 0 zijn? Verklaar je antwoord.

5.(1) [a] (3) Bewijs dat het randwaardeprobleem

$$y'' + y = \sin x, \quad y(0) + y'(0) = 0, y(\pi/2) = 0$$

precies één oplossing heeft op $[0, \pi/2]$. Formuleer de gebruikte stelling.
(b)[6] Bereken op twee manieren de oplossing van het probleem in (a): (i) direct met behulp van oplossingen van de homogene en een particuliere oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking en (ii) met behulp van de Greense functie.